مفاهیم مقدماتی آزمایش

اندازه‌گیری

مقدمه

در آزمایش‌گاه به دنبال روابطی بین کمیت‌ها هستیم. برای این منظور باید کمیت‌های فیزیکی را که در روابط دخیل هستند اندازه‌گیری کنیم. مثلا اندازه‌ی جرم یک وزنه، طول یک لوله ویا زاویه‌ی یک پرتو با سطح را بسنجیم. برای هرکدام از این مثال‌ها، وسایل و روش‌هایی برای اندازه‌گیری وجود دارند. مثلا برای اندازه‌گیری طول می‌توان از خط‌کش یا متر استفاده کرد. قبل از انجام هر آزمایشی باید با تعدادی از این وسایل و روش‌های اندازه‌گیری آشنا شویم و بتوانیم بین چند روش یکی را که برای آزمایش مطلوب‌تر است انتخاب کنیم تا نتایج بهتری به دست آوریم.

خطا

ما در آزمایش‌گاه هیچ وقت نمی‌توانیم ادعا کنیم که کمیت اندازه‌گیری شده در آزمایش با مقدار واقعی آن یکسان است. مثلا ممکن است در یک آزمایش گرمای ویژه‌ی آب به جای $۴۱۸۶\frac{J}{kg^{\circ}\mathrm{C}}$ (که نتیجه‌ی آزمایش دقیق‌تری است)، مقدار $۴۶۴۱\frac{J}{kg^{\circ}\mathrm{C}}$ به دست بیاید. ما در این آزمایش با یک اختلاف مواجه هستیم. میزان این اختلاف با رابطه زیر به دست می‌آید

$$\text{اختلاف} = \left|\text{نتیجه آزمایش} - \text{مقدار واقعی}\right| \qquad \text{رابطه‌ی ۱}$$

توجه کنید که مقدار واقعی هیچ وقت قابل دستیابی نیست و منظور ما از مقدار واقعی نتیجه‌ی دقیق‌ترین آزمایشی است که تا کنون انجام شده است. اختلاف گرمای ویژه در آزمایش بالا برابر با $۴۵۵\frac{J}{kg^{\circ}\mathrm{C}}$ است.

خطای نسبی هم نسبت این اختلاف به مقدار واقعی آن است

$$\text{خطای نسبی} = \frac{\left|\text{نتیجه آزمایش} - \text{مقدار واقعی}\right|}{\text{مقدار واقعی}} \qquad \text{رابطه‌ی ۲}$$

که در این مثال ۰٫۱۰۸ است که با گرد کردن آن ۰٫۱۱ می‌شود. به علاوه می‌توان خطای نسبی را به درصد بیان کرد که به آن درصد خطای نسبی می‌گویند. در این مثال درصد خطای نسبی برابر ٪۱۱ است.

البته این نکته هم وجود دارد که ما همیشه مقدار واقعی کمیت مورد نظر را نمی‌دانیم. بنابراین باید از روش‌های دیگری برای تعیین خطا استفاده کنیم. که در قسمت‌های آینده در این مورد بحث خواهیم کرد.

دقت اندازه‌گیری

فرض کنید شخصی طول یک مداد را با یک خط‌کش اندازه‌گیری کرده و مقدار ۲۲/۵۰۰۱ سانتی‌متر را گزارش دهد. آیا شما باور می‌کنید که این شخص توانسته است طول این مداد را تا یک میکرومتر هم اندازه بگیرد؟ با این وجود ممکن است طول واقعی مداد همین عدد باشد (البته با فرض‌های غلطی مثل صاف بودن ابتدا و انتهای مداد). ولی نکته در اینجاست که با یک خط‌کش معمولی نمی‌توان یک میکرومتر را اندازه گرفت و دقت خط‌کش خیلی پایین‌تر از حد یک میکرومتر است و با یک خط‌کش می‌توان تا دقت میلی‌متر اندازه‌گیری کرد. پس این شخص باید طول مداد را به صورت ۲۲/۵ سانتی‌متر گزارش دهد. به علاوه مقدار عدم قطعیت اندازه‌گیری خود را نیز به نحوی اطلاع دهد مثلا ۰/۱ سانتی‌متر (کم‌ترین طولی که با خط‌کش می‌توان اندازه گرفت) که به آن خطای اندازه‌گیری می‌گوییم. بنابراین طول واقعی مداد عددی بین ۲۲/۴ و ۲۲/۶ سانتی‌متر است. پس هر کمیت فیزیکی که اندازه‌گیری می‌شود دارای دقت مشخصی است که بستگی به وسایل اندازه‌گیری و چیزهای دیگر (افت و خیزهای ذاتی مثل شکل ۱) دارد، و نمی‌توان گفت کمیت اندازه‌گیری شده به طور دقیق همان مقدار واقعی کمیت است.

اهمیت دقت اندازه‌گیری و خطا

به یک مثال ساده ولی آموزنده توجه کنید : فرض کنید که می‌خواهیم صحت اصل بازتاب را بررسی نماییم که می‌گوید: "زاویه‌ی تابش پرتوی فرودی با زاویه‌ی پرتوی بازتاب شده برابر است."

$$\theta_r = \theta_i \qquad \text{رابطه‌ی ۳}$$

که θ_i در این رابطه زاویه‌ی فرودی و θ_r زاویه‌ی بازتاب است. این زوایا نسبت به خط عمود بر سطح آینه سنجیده می‌شوند.

فرض کنید ما در آزمایش‌گاه زاویه‌ی فرود را ۳۶ درجه تنظیم کرده‌باشیم و زاویه بازتاب را ۳۷ درجه اندازه‌گیری کنیم. این دو عدد با یکدیگر برابر نیستند. حالا آیا اصل بازتاب اشتباه بوده؟

نکته در این‌جا است که آیا این زاویه را به صورت دقیق دقیق اندازه گرفته‌ایم؟ مسلما باید دقت اندازه‌گیری را در نظر گرفت. ما باید ببینیم که زاویه‌ی فرود با چه دقتی تنظیم شده است و زاویه‌ی بازتاب با چه دقتی اندازه گرفته شده است. مثلا اگر بدانیم دقت این زوایا ۰,۱ درجه است، آن‌گاه می‌فهمیم که در درس فیزیک ۱ به ما دروغ گفته‌اند! چون اختلاف این دو زاویه (۳۶ و ۳۷ درجه) خیلی بیش‌تر از خطای اندازه‌گیری آن‌ها است. اما اگر دقت اندازه‌گیری ما ۱ درجه باشد. این رابطه درحد دقت آزمایش، صحت دارد. چون ما می‌دانیم زاویه‌ی فرود دقیقا ۳۶ درجه نیست بلکه می‌تواند مقدار حقیقی آن، عددی غیر از ۳۶ درجه باشد. یعنی عددی است بین ۳۵ و ۳۷ درجه و همین طور زاویه‌ی بازتاب بین ۳۶ تا ۳۸ درجه است. در این دو محدوده، مقدار واقعی این دو کمیت می‌تواند باهم برابر باشد. پس ما در هر اندازه‌گیری باید دقت آن را نیز در نظر بگیریم، تا بتوانیم نتایج منطقی و صحیح از آزمایش بگیریم. در بخش‌های بعدی چگونگی محاسبه‌ی خطا در اندازه‌گیری‌ها توضیح داده می‌شود.

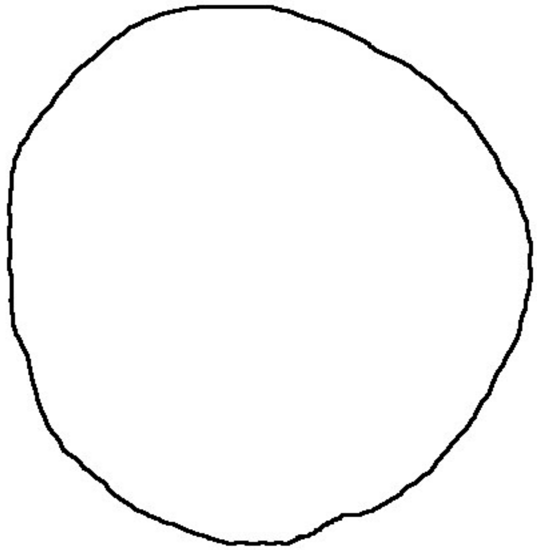
انواع خطا در اندازه‌گیری و راه مقابله با آن‌ها

خطاهایی که در یک آزمایش پیش می‌آیند دو نوع هستند:

- خطاهای سیستماتیک
- خطاهای تصادفی

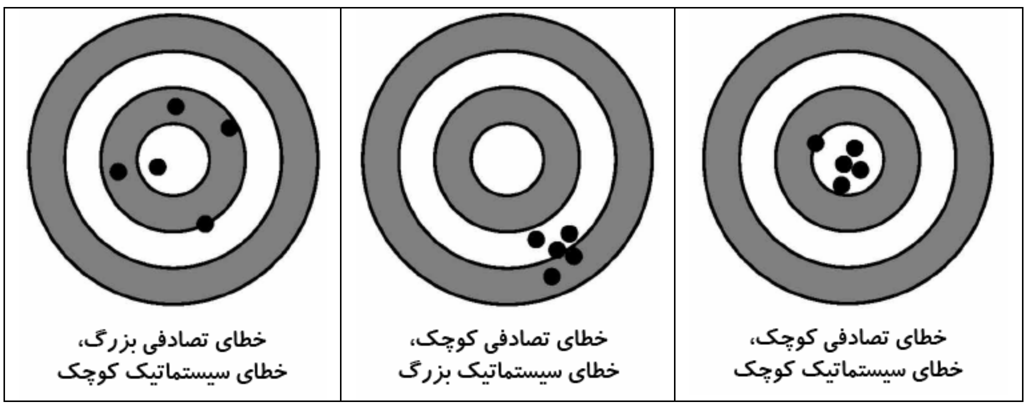
خطاهای سیستماتیک غالبا به دلیل ایده‌آل نبودن آزمایش و وسایل آن رخ می‌دهد. مثلا اتلاف گرما در "آزمایش گرماسنجی" باعث ایجاد خطای سیستماتیک می‌شود و گرمای جذب شده توسط ماده‌ی مورد نظر برابر گرمای داده شده نخواهد بود. یا در اندازه‌گیری زمان یک رویداد ممکن است همیشه زمان‌سنج را دیرتر متوقف کنید. با کمی جستجو در هر آزمایش می‌توان عوامل خطای سیستماتیک آزمایش را پیدا کرده و تاحد امکان آن‌ها را رفع نمود. این خطاها معمولا به طور یکنواخت روی اندازه‌گیری‌ها اثر می‌گذارند. در این موارد می‌توان با یک ضریب تصحیح این خطاها را حذف کرد. مثلا خط‌کشی را در اختیار داریم که می‌دانیم هر سانتی‌متر آن یک میلی‌متر از سانتی‌متر واقعی کم دارد. در واقع هر سانتی‌متر آن ۰,۹ سانتی‌متر واقعی است. بنابر این هر طولی که با این خط‌کش اندازه‌گیری شود $\frac{۱۰}{۹}$ مقدار واقعی آن خواهد بود. ما می‌توانیم هر طولی را که با این خط‌کش به دست آوردیم در ۰,۹ ضرب کنیم تا اثر این خطا را به کلی رفع کنیم (این کار نوعی کالیبره کردن شمرده می‌شود). البته در تمام موارد، این گونه خطاها را نمی‌توان باضرب کردن یا جمع ویا تفریق یک عدد از بین برد. شاید در شرایطی لازم باشد برای رفع این خطا وسیله‌ی آزمایش را تغییر داد. رفع این خطاها یکی از هنرهای آزمایش‌گر محسوب می‌شود.

خطای تصادفی خطایی است که در هر اندازه‌گیری تغییر می‌کند. در این نوع خطا احتمال کم‌تر یا بیش‌تر شدن اندازه‌گیری از مقدار واقعی با هم برابر است. این خطاها همواره در یک آزمایش وجود دارند و سبب می‌شوند که نتایج اندازه‌گیری‌های متوالی در اطراف مقدار حقیقی پراکنده باشند. این دسته خطاها با روش‌های آماری قابل محاسبه و تعدیل هستند. به عنوان مثال فرض کنید می‌خواهید اثر نمک زمین بر روی وزن نخود کاشته‌شده در آن را بررسی کنید. برای این کار گیاه نخود را در دو خاک که تنها نمکشان متفاوت است می‌کارید و سعی می‌کنید تمام شرایط دیگر برای نخودها یکسان باشد، اما در نهایت وزن نخودهای شما که تحت یک شرایط بوده‌اند، یکسان نخواهد بود و دارای پراکندگی است این عدم تساوی همان خطای تصادفی است. به عنوان مثالی دیگر فرض کنید که می‌خواهید قطر یک شیء را اندازه‌گیری کنید. این شیء شبیه به یک دایره است (شکل۱). مسلما قطر اندازه‌گیری شده بستگی به این دارد که خط‌کش را چگونه روی دایره قرار می‌دهید. و اگر چند اندازه‌گیری انجام دهید قطرهای یکسانی اندازه نخواهید گرفت.



شکل ۱. یک دایره با کمی اعوجاج که می‌خواهیم قطر آن را اندازه‌گیری کنیم.

برای بهتر درک کردن این دونوع خطا (خطای سیستماتیک و خطای تصادفی) به شکل‌های زیر توجه کنید.



شکل ۲ مفهوم خطای تصادفی و سیستماتیک. مرکز دایره‌ها (هدف) همان مقدار واقعی است. و دایره‌های سیاه نشان‌دهنده‌ی اندازه‌گیری‌ها است. فاصله‌ی نقاط اندازه‌گیری از هدف خطا است.

حالا فرض کنید کمیتی را اندازه‌گیری کرده‌اید (با حذف خطاهای سیستماتیک تا حد ممکن) و می‌خواهید آن را با خطایش گزارش کنید. برای گزارش خطای یک کمیت باید دو چیز را در نظر گرفت:

۱) خطای تصادفی

۲) دقت دستگاه اندازه‌گیری

دقت دستگاه دقتی است که یا روی دستگاه نوشته شده است یا با تشخیص آزمایش‌گر تخمین زده می‌شود. مثلا روی یک خط‌کش میلی‌متری دقت آن نوشته نشده‌است ولی ما می‌توانیم برای آن دقتی حدود ۰,۵ میلی‌متر را در نظر بگیریم. اگر روی دستگاه

پیچیده‌ای (مثل یک مولتی‌متر) دقت آن نوشته نشده باشد و به دلیل پیچیدگی دستگاه نتوانیم دقت آن را تخمین بزنیم، باید کوچکترین عددی که این وسیله می‌تواند نشان دهد را به عنوان دقت این دستگاه در نظر بگیریم.

برای گزارش یک خطا باید به هردوی این خطاها دقت کرد و خطایی که مقدار بیش‌تری دارد را در نظر گرفت. به عبارت دیگر، اگر خطای تصادفی از خطای دستگاه کم‌تر بود خطای اندازه‌گیری، همان خطای دستگاه اندازه‌گیری است. در غیر این صورت خطای اندازه‌گیری برابر با خطای تصادفی خواهد بود.

آمار

مقدمه

در بخش قبل گفتیم که با روش‌های آماری می‌توان خطای تصادفی را کم‌تر کرده و مقدار آن را محاسبه نمود. در اینجا این روش‌های آماری را توضیح می‌دهیم.

چند اندازه‌گیری متوالی را در نظر بگیرید. آن‌ها را به صورت x_i نمایش می‌دهیم. این اعداد به دلیل وجود خطای تصادفی در سیستم با هم برابر نیستند. مثلا مقدار مقاومت یک سیم‌پیچ که با یک مولتی‌متر اندازه‌گیری شده، در جدول زیر نوشته شده است (جدول۱). همان‌طور که مشاهده می‌کنید این اعداد باهم برابر نیستند. اصطلاحاً می‌گوییم دارای پراکندگی هستند.

دفعات اندازه‌گیری	۱	۲	۳	۴	۵
R/Ω	۴.۶۱	۴.۶۲	۴.۶۶	۴.۶۲	۴.۶۰

جدول ۱ نتایج اندازه‌گیری مقاومت یک سیم‌پیچ

میانگین

میانگین یک رشته اندازه‌گیری برابر با جمع تمام اندازه‌گیری‌های آن رشته تقسیم بر تعداد آن‌ها است. می‌توانید خودتان میانگین اعداد جدول فوق را حساب کنید (برای این کار اعداد این جدول (مقاومت‌های اندازه‌گیری شده) را با هم جمع کرده و نتیجه را بر ۵ که تعداد عددها است تقسیم کنید). نتیجه این محاسبه ۴.۶۲Ω است. اگر عدد دیگری به دست می‌آورید توصیه می‌شود که در مسابقه‌ی روزبه شرکت نکنید!

با عمل میانگین‌گیری خطای تصادفی کم‌تر می‌شود. در واقع چون احتمال مثبت بودن یا منفی بودن خطای تصادفی با هم برابر است؛ با جمع، این خطاها اثر یکدیگر را تا حدی خنثی می‌کنند و خطای حاصل را در مقدار میانگین‌گیری شده کم‌تر می‌کنند. در واقع هر چه تعداد اندازه‌گیری‌ها بیش‌تر باشد خطای تصادفی "میانگین" کم‌تر می‌شود. در حالت کلی میانگین یک کمیت به صورت $\overline{x}$ویا $\langle x \rangle$ نشان داده می‌شود. در این مثال میانگین به صورت $\overline{R} =$ ۴.۶۲ Ω و یا $\langle R \rangle =$ ۴.۶۲ Ω نمایش داده می‌شود.

انحراف معیار

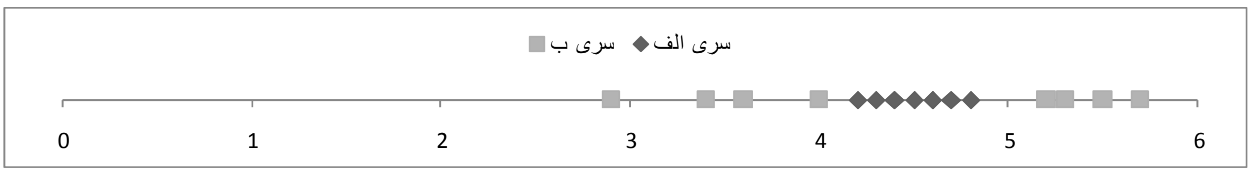
قبل از توضیح انحراف معیار به مفهوم پراکندگی می‌پردازیم. به اعداد جدول۱ که مقاومت اندازه‌گیری شده برای یک سیم‌پیچ است توجه کنید. همان گونه که مشاهده می‌کنید این اعداد با هم برابر نیستند و یا به اصطلاح می‌گوییم دارای پراکندگی هستند. به این عدم تساوی افت و خیز هم می‌توان گفت. در یک رشته از اعداد پراکندگی (افت و خیز) می‌تواند زیاد یا کم باشد. به عنوان مثال به اعداد جدول۲ توجه کنید. سه رشته‌ی عدد ارائه شده در این جدول دارای میانگین یکسان هستند اما پراکندگی (افت و خیز)

متفاوتی دارند. برای نشان دادن زیاد بودن و کم بودن پراکندگی باید عددی به رشته‌ی اعداد نسبت داد. این عدد را با علامت σ (زیگما) نشان می‌دهیم و به آن انحراف معیار می‌گوییم. پس هر چه σ بیش‌تر باشد میزان پراکندگی بیش‌تر است. اگر σ برابر با صفر باشد پراکندگی وجود ندارد و تمامی اعداد با هم برابرند. به اعداد زیر توجه کنید (جدول۲):

شماره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	میانگین	σ
الف: پراکندگی کم	۴,۶	۴,۵	۴,۲	۴,۶	۴,۴	۴,۸	۴,۷	۴,۳	۴,۴	۴,۵	۰,۲
ب: پراکندگی زیاد	۴,۹	۴	۳,۶	۵,۲	۲,۹	۳,۴	۵,۳	۵,۷	۵,۵	۴,۵	۱,۰
ج: یکنواخت	۴,۵	۴,۵	۴,۵	۴,۵	۴,۵	۴,۵	۴,۵	۴,۵	۴,۵	۴,۵	۰

جدول ۲ انحراف معیار برای سه نمونه داده با پراکندگی متفاوت

در جدول بالا علی‌رغم اینکه اعداد، میانگین یکسانی دارند انحراف معیار آن‌ها مساوی نیست. سری اول دارای پراکندگی کمی است. در واقع فاصله این اعداد از میانگینشان کم‌تر از ۰,۴ است. اما در سری دوم پراکندگی خیلی بیش‌تر است. فاصله‌ی این اعداد از میانگین‌شان به طور متوسط حدود ۱ است. و در سری سوم همه‌ی اعداد یک مقدار داشته و بنابراین پراکندگی وجود ندارد (نمودار ۱را ببینید).



نمودار ۱ اعداد سری الف و ب ازجدول۲ روی محور اعداد نمایش داده شده‌اند. همان طور که می‌بینید اعداد سری الف (لوزی‌ها) پراکندگی کمی داشته و به یکدیگر نزدیکند. اما اعداد سری ب (مربع‌ها) دارای افت و خیزهای بیش‌تری هستند و به وضوح دیده می‌شود که پراکندگی آن‌ها بیش‌تر از سری الف است و با هم فاصله‌ی بیش‌تری دارند.

حالا به سراغ محاسبه‌ی انحراف معیار برای رشته‌ای از اعداد می‌رویم. میانگین اعداد نشان‌دهنده‌ی رفتار کلی آن اعداد خواهد بود. مثلا معدل شما نشان‌دهنده‌ی وضعیت تحصیلی شما است که میانگین نمراتتان است. بنا بر این پراکندگی اعداد را هم می‌توان با میانگین آن‌ها سنجید یعنی اختلاف اعداد با میانگین را بررسی کنیم. به جدول ۳ که اختلاف اعداد جدول۲ از میانگین‌شان است توجه کنید. همان طور که دیده می‌شود اختلاف اعداد از میانگین برای سری ب که پراکندگی زیاد دارد بیش‌تر است.

شماره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	σ
فاصله‌ی اعداد الف از میانگین	۰,۱	۰	-۰,۳	۰,۱	-۰,۱	۰,۳	۰,۲	-۰,۲	-۰,۱	۰,۲
فاصله‌ی اعداد ب از میانگین	۰,۴	-۰,۵	-۰,۹	۰,۷	-۱,۶	-۱,۱	۰,۸	۱,۲	۱	۱,۰
فاصله‌ی اعداد ج از میانگین	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰

جدول ۳ اختلاف اعداد جدول۲ با میانگین‌شان

اما فاصله از میانگین در یک رشته برای اعداد مختلف متفاوت است ولی ما برای انحراف معیار به یک کمیت مشخص و ثابت نیاز داریم. واضح‌ترین راه این است که ما میانگین فاصله‌ها را به عنوان انحراف معیار (شدت پراکندگی) در نظر بگیریم. پس فاصله‌ها را جمع کرده و بر تعداد اعداد تقسیم می‌کنیم. شما می‌توانید این کار را برای اعداد جدول ۳ که فاصله‌های اعداد جدول۲ هستند انجام دهید. و متوجه می‌شوید که این راه خوبی نیست. چرا؟

پس چه کاری باید کرد؟ برای مقابله با این مشکل دو راه وجود دارد. راه اول این است که قدر مطلق فاصله‌ها را میانگین‌گیری کنیم. و راه دوم این است که فاصله‌ها را مجذور کنیم و بعد میانگین‌شان را بگیریم. راه دوم به دلیل سادگی‌هایی که در روابط خواهد داشت مطلوب‌تر است. پس انحراف معیار به این روش محاسبه می‌شود. ابتدا میانگین اعداد پیدا می‌شود. اختلاف اعداد با میانگین محاسبه شده و حاصل‌جمع مجذور فاصله‌ها را حساب می‌کنیم. سپس حاصل مجموع این اعداد را بر تعداد اعداد تقسیم کرده و در نهایت یک جذر از حاصل می‌گیریم تا اثر مجذور کردن را حذف کنیم. به صورت ریاضی انحراف معیار یک سری N تایی از اعداد که آن‌ها را با x_i نشان می‌دهیم از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\sigma = \sqrt{\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^{۲}} \qquad \text{رابطه‌ی ۴}$$

که $\bar{x}$ مقدار میانگین رشته‌ی اعداد مورد نظر ما است. به عنوان یک تمرین ساده شما می‌توانید انحراف معیار اعداد جدول۲ را محاسبه کرده و نتایج خود را با σ که در جدول نوشته شده مقایسه کنید.

پراکندگی میانگین

میانگین اعداد هم می‌تواند پراکندگی داشته باشد.یعنی چند دسته از اندازه‌گیری‌های متوالی می‌توانند میانگین‌هایی که با هم برابر نیستند داشته باشند. برای مثال به اعداد جدول۴ توجه کنید.

انحراف معیار میانگین یک دسته اندازه‌گیری را با σ_m نشان می‌دهند. مراقب باشید که این کمیت را با کمیت مشابه آن یعنی σ اشتباه نکنید. σ پراکندگی یک رشته از اعداد است اما σ_m پراکندگی میانگین‌های رشته‌هایی از اعداد است. مقدار انحراف معیار برای مقادیر میانگین جدول۴ ، $\sigma_m = ۰.۲$ است. این عدد کمیت خوبی برای خطای اندازه‌گیری میانگین‌ها خواهد بود.

شماره	الف	ب	ج	د	ه
۱	۵	۴,۴	۴,۳	۵,۳	۵,۱
۲	۵,۳	۴,۶	۴,۵	۵,۲	۵,۶
۳	۵,۱	۵,۴	۵,۳	۴,۴	۵,۱
۴	۴,۵	۴,۵	۴,۶	۴,۲	۵,۳
۵	۵,۱	۴,۲	۴,۹	۵,۰	۵,۲
۶	۵,۴	۵,۱	۴,۱	۵,۱	۵,۳
۷	۵,۳	۵,۲	۵,۱	۵,۰	۴,۵
میانگین	۵,۱	۴,۸	۴,۷	۴,۹	۵,۲
σ	۰,۳	۰,۴	۰,۴	۰,۴	۰,۳

جدول ۴ چند مجموعه اندازه‌گیری‌های متوالی. سری الف، ب، ج، د، ه هرکدام یک دسته اندازه‌گیری هستند. میانگین هرکدام از این دسته اندازه‌گیری‌ها در زیر آن‌ها نوشته شده است. نکته مهم تفاوت میانگین هر کدام از این دسته‌ها می‌باشد. در واقع نتایج میانگین هم دارای پراکندگی است و می‌توان برای آن انحراف معیار تعریف کرد.

اما برای پیدا کردن انحراف معیار میانگین لازم نیست این همه اندازه‌گیری انجام دهیم. بلکه با داشتن انحراف معیار یک دسته از اعداد و تعداد آن‌ها، می‌توان انحراف معیار میانگین آن‌ها را با یک رابطه که در زیر آمده است به دست آورد. با استفاده از این رابطه انحراف معیار میانگین بدون تکرار اندازه گرفتن میانگین، به دست می‌آید. در واقع نوعی کلک آماری زده می‌شود[1].

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$ رابطه‌ی ۵

که در رابطه‌ی بالا N تعداد اعداد اندازه‌گیری شده است که برای محاسبه‌ی میانگین استفاده شده‌اند. همان طور که مشاهده می‌کنید هر چه تعداد اندازه‌گیری‌ها بیش‌تر شود، مقدار σ_m کم‌تر می‌شود. پس افزایش تعداد اندازه‌گیری، پراکندگی میانگین را کم کرده و در واقع خطای تصادفی میانگین کم می‌شود. بنابر این هر گاه در پژوهش خود با خطای تصادفی زیادی مواجه شدید با افزایش تعداد اندازه‌گیریتان می‌توانید این خطا را تعدیل کنید. البته باید توجه داشته باشید که خطای اندازه گیری، بیشینه‌ی خطای دستگاه اندازه‌گیری و خطای تصادفی است لذا پایین‌تر آوردن خطای تصادفی از خطای دستگاه اندازه‌گیری سودی ندارد.

برای پیدا کردن پراکندگی میانگین از رابطه‌ی ساده شده و تقریبی زیر نیز می‌توان استفاده کرد. که برای تعداد اندازه‌گیری‌های کم‌تر از ۱۲ صحت دارد

$$\sigma_m = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{N}$$ رابطه‌ی ۶

که $x_{\max}$ بیش‌ترین عدد اندازه‌گیری شده، $x_{\min}$ کم‌ترین عدد اندازه‌گیری شده بوده و N تعداد اعداد اندازه‌گیری شده است.

[1] برای دیدن اثبات می‌توانید به کتاب فیزیک عملی بخش ۳,۳ توزیع اندازه‌گیری‌ها مراجعه کنید (صفحه ۲۰ و ۲۱)

مقدار انحراف معیار میانگین کمیت خوبی برای خطای تصادفی است. چون نشان‌دهنده پراکندگی و پخش شدگی میانگین‌ها است. در واقع عددی که پراکندگی بیش‌تر دارد دارای خطای بیش‌تری است یعنی با تکرار اندازه‌گیری نتایج متفاوت‌تر خواهد بود. در اعداد جدول۱ مقدار پراکندگی میانگین $\sigma_m = ۰.۱۲\Omega$ است. پس مقدار مقاومت سیم پیچ $\overline{R} = ۴.۶۲ \pm ۰.۱۲\Omega$ خواهد بود. البته اگر خطای وسیله اندازه‌گیری بالاتر از ۰.۱۲Ω باشد خطای کمیت اندازه‌گیری شده همان خطای دستگاه اندازه‌گیری خواهد بود.

توجه کنید که خطا نباید بیش‌تر از دو رقم داشته باشد، رقم‌های سوم و بیش‌تر خطا، بی‌معنی هستند در واقع محاسبه‌ی خود خطا هم با عدم قطعیت و خطا همراه است. می‌توان نشان داد که اگر چند بار خطا را محاسبه کنید به دلیل وجود عدم قطعیت در محاسبات به نتایج مختلفی می‌رسید که این نتایج مختلف دارای انحراف معیار مشخصی هستند که از آن به عنوان خطای خطا یاد می‌کنیم. مقدار این عدد برابر با σ / N است. از طرفی خود خطا برابر بود با $\sigma / \sqrt{N}$، بنابر این نسبت عدم قطعیت خطا به مقدارش برابر با $۱/\sqrt{N}$ است و این یعنی اگر بخواهیم خطایمان تا ۲ رقم معنی‌دار اعتبار داشته باشد (یعنی نسبت عدم قطعیت خطا به خود خطا ۰,۱ باشد) از مرتبه‌ی ۱۰۰ اندازه گیری باید داشته باشیم. پس در پژوهش‌هایی که انجام می‌دهید سعی کنید خطایی که یادداشت می‌کنید تنها یک رقم داشته باشد چون محاسبه‌ی خطا تا دو رقم اعشار برای وقتی صحیح است که تعداد اندازه‌گیری‌های شما خیلی زیاد باشند.

محاسبه‌ی خطای توابع

ممکن است در تحلیل نتایج مجبور شوید از روابط و توابعی استفاده کنید. یعنی به جای خود کمیت اندازه‌گیری شده به تابعی از آن نیاز داشته باشید مثلا توان دوم آن و یا جذر کمیت. به این اعداد کمیت‌های ثانویه می‌گوییم که مستقیم آن‌ها را اندازه‌گیری نکرده‌ایم. سوالی که مطرح است این است که خطای کمیات ثانویه چه قدر خواهد بود مسلما یک راه این است که کمیات ثانویه هر اندازه‌گیری را محاسبه کرده و سپس همان‌گونه که خطای تصادفی کمیت‌ها را پیدا می‌کردیم خطای این کمیات را محاسبه کنیم. اشکالی که مطرح است این است که با این کار ما خطای تصادفی این کمیات را محاسبه کرده‌ایم و دقت دستگاه اندازه‌گیری را در خطای خود در نظر نگرفته‌ایم. مثلا فرض کنید تمام اندازه‌گیری‌ها یکسان باشند به طوری که خطای تصادفی صفر شود، اما ما می‌دانیم این به معنای صفر بودن خطا نیست بلکه خطای کمیت اندازه‌گیری شده برابر با دقت دستگاه اندازه‌گیری است. لذا با در نظر گرفتن دقت دستگاه خطای خود را گزارش می‌دهیم. اما در کمیات ثانویه دقت دستگاه را چگونه باید وارد کرد؟ برای این کار روشی کلی وجود دارد که در پیوست الف این جزوه توضیح داده شده اما ما در این جا به بیان مثال‌هایی از کمیات ثانویه و خطای آن‌ها بسنده می‌کنیم.

جمع

فرض کنید که کمیت مهم برای شما حاصل جمع دو کمیت مختلف $x_۱$ و $x_۲$ است. که خطای هر کدام به ترتیب $\Delta x_۱$ و $\Delta x_۲$ است. حاصل جمع این دو کمیت را با s و خطای آن را با Δs نشان می‌دهیم. پس بنا به تعریف داریم

رابطه‌ی ۷
$$s = x_۱ + x_۲$$

شاید فکر کنید که خطای s باید جمع خطای $x_۱$ و $x_۲$ باشد. چون می‌دانیم مقدار واقعی کمیت‌ها کـه آن‌هـا را بـا $X_۱$ و $X_۲$ نشان مـی‌دهـیم در همسـایگی مقـدار انـدازه‌گیـری شـده و در فاصـله‌ی خطـا هسـتند یعنـی : $x_۱ - \Delta x_۱ < X_۱ < x_۱ + \Delta x_۱$ و $x_۲ - \Delta x_۲ < X_۲ < x_۲ + \Delta x_۲$ بنا بر این $x_۱ + x_۲ - (\Delta x_۱ + \Delta x_۲) < S < x_۱ + x_۲ + (\Delta x_۱ + \Delta x_۲)$ خواهد بـود و در نتیجـه مقدار خطا $\Delta s = \Delta x_۱ + \Delta x_۲$ خواهد شد. در حالی که این کار غلط است. با این کار تنها حد بالای خطا را مشخص کـرده‌ایـم نـه خود آن را، روش درست این است که ما انحراف معیار S را به عنوان خطای آن در نظر بگیریم. با چنین فرضی خطای این کمیـت به صورت زیر در می‌آید

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x_۱^{۲} + \Delta x_۲^{۲}}$$ رابطه‌ی ۸

به عنوان یک مثال فرض کنید دو کمیت اندازه‌گیری شده طول و عرض یک میز هستند، کـه عـرض آن $a = ۰.۶۰۰ \pm ۰.۰۰۳m$ و طول آن $b = ۰.۸۰۰ \pm ۰.۰۰۵m$ است. اگر مایل باشیم محیط میز را محاسبه کنیم باید حاصل جمع دو کمیـت را داشـته باشـیم. حاصل جمع این دو کمیت را با c نشان می‌دهیم. در این صورت $c = ۱.۴۰۰ \pm ۰.۰۰۶m$ می‌شود. این کمیت را بایـد در ۲ ضـرب کنیم تا محیط میز را محاسبه کرده باشیم. در موارد بعدی پیدا کردن خطای ضرب را هم یاد خواهید گرفت تا بتوانید محیط میز را با خطایش محاسبه کنید.

اگر به جای دو عدد، n عدد را جمع کرده باشیم یعنی

$$s = \sum_{i=۱}^{n} x_i$$ رابطه‌ی ۹

خطای این مجموع با این رابطه به دست می‌آید

$$\Delta s = \sqrt{\sum_{i=۱}^{n} \Delta x_i^{۲}}$$ رابطه‌ی ۱۰

تفریق

اگر کمیت مورد نظر شما حاصل تفریق دو کمیت $x_۱$ و $x_۲$ با خطای $\Delta x_۱$ و $\Delta x_۲$ باشد و آن را با d و خطایش را با Δd نشـان دهیم خواهیم داشت

$$d = x_۱ - x_۲$$ رابطه‌ی ۱۱

و

$$\Delta d = \sqrt{\Delta x_۱^{۲} + \Delta x_۲^{۲}}$$ رابطه‌ی ۱۲

توجه : اکیدا توصیه می‌شود از تفریق دو کمیت پرهیز شود. چون با عمل تفریق، حاصل عدد کم‌تری است اما با خطای بیش‌تر. این باعث افزایش خطای نسبی در کمیت شده که اصلا مطلوب نیست. لذا توصیه می‌شود که به جای این کـار دسـتگاه انـدازه‌گیـری را

کالیبره کرده تا از این تفریق جلوگیری شود. به عنوان مثال فرض کنید می‌خواهید وزن مقداری آب را اندازه بگیرید. مسلما آب را باید با ظرفی روی ترازو بگذارید. شما می‌توانید این ظرف را وزن کرده و آب و ظرف را نیز وزن کنید و با تفریق این دو کمیت مقدار وزن آب را پیدا کنید. اما راه بهتری هم وجود دارد ظرف را روی ترازو گذاشته و ترازو را طوری کالیبره کنید که با ظرف وزن صفر را نشان دهد سپس آب را داخل ظرف ریخته و وزنی که ترازو نشان می‌دهد را یادداشت کنید. با این کار هم خود خطا و هم خطای نسبی اندازه‌گیری را کاهش خواهید داد.

دوباره مثال میز را در نظر می‌گیریم. اختلاف طول و عرض میز $d = ۲۰.۰ \pm ۰.۶cm$ می‌شود. نکته‌ی جالب این است که خطای نسبی این کمیت ۰,۰۳ است در حالی که خطای نسبی عرض ۰,۰۰۵ و خطای نسبی طول ۰,۰۰۶ است. یعنی خطای نسبی در این مورد تقریبا ۱۰ برابر شده است.

ضرب

حالا دو کمیت $x_۱$ و $x_۲$ را با خطای $\Delta x_۱$ و $\Delta x_۲$ ضرب می‌کنیم. حاصل را با p نشان می‌دهیم

رابطه‌ی ۱۳
$$p = x_۱ x_۲$$

خطای p از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

رابطه‌ی ۱۴
$$\Delta p = x_۱ x_۲ \sqrt{\left(\frac{\Delta x_۱}{x_۱}\right)^۲ + \left(\frac{\Delta x_۲}{x_۲}\right)^۲}$$

بنابراین مساحت میز به صورت $s = ۰.۴۸ \pm ۰.۰۰۳m^۲$ قابل گزارش است. به علاوه برای محیط آن که با ضرب کردن c در ۲ به دست می‌آید داریم $M = ۲.۸۰ \pm ۰.۰۱m$

تقسیم

حالا دو کمیت $x_۱$ و $x_۲$ را با خطای $\Delta x_۱$ و $\Delta x_۲$ بر هم تقسیم می‌کنیم. حاصل را با t نشان می‌دهیم ($t = \frac{x_۱}{x_۲}$). خطای t از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

رابطه‌ی ۱۵
$$\Delta t = \frac{x_۱}{x_۲} \sqrt{\left(\frac{\Delta x_۱}{x_۱}\right)^۲ + \left(\frac{\Delta x_۲}{x_۲}\right)^۲}$$

بنابراین نسبت عرض به طول میز $\alpha = ۰.۷۵۰ \pm ۰.۰۰۶$ به دست می‌آید.

خطای دستگاه اندازه‌گیری

یکی از دلایل خطا، عدم دقتی است که دستگاه اندازه‌گیری دارد. همان‌گونه که قبلا اشاره کرده‌ایم با خط کش میلی‌متری نمی‌توان طولی را با دقت دهم میلی‌متر اندازه گرفت. و نیز گفتیم که خطای اندازه‌گیری، بیش‌ترین مقدار خطای تصادفی و خطای دستگاه اندازه‌گیری است. اما خطای دستگاه اندازه‌گیری را چگونه باید تعیین کرد. در برخی از مواقع این کار آسانی است چون روی بعضی از دستگاه‌های اندازه‌گیری دقت آن‌ها نوشته شده است. اگر دقت دستگاه روی آن نوشته نشده بود می‌توان کم‌ترین رقمی که دستگاه نشان می‌دهد را به عنوان خطا نشان داد. برای مثال اگر از یک دماسنج دیجیتال استفاده می‌کنید و این دماسنج دمای $۱۵.۳^\circ C$ یا $۱۴.۰^\circ C$ را نشان دهد. در این صورت شما می‌توانید خطا را به اندازه‌ی $۰.۱^\circ C$ گزارش کنید (البته اگر خطای تصادفی شما کم‌تر از $۰.۱^\circ C$ باشد).

در مورد بعضی از وسایل اندازه‌گیری باید به نکاتی توجه داشت:

۱) زمان‌سنج

برای خطای زمان‌سنج آخرین رقمی که این وسیله نشان می‌دهد مناسب نیست. اکثر زمان سنج‌ها زمان را با دقت $۰.۰۱s$ نشان می‌دهند اما ما نمی‌توانیم از این توانایی دستگاه استفاده کنیم. چون زمان واکنش ما از این عدد بیش‌تر است. برای این منظور می‌توان عددی در حدود $۰.۱s$ برای این خطا در نظر گرفت.

۲) خط‌کش

سعی کنید که از خط‌کش پلاستیکی استفاده نکنید چون بدترین نوع خط‌کش است و دقت خوبی ندارد. خط‌کش فلزی برای اندازه‌گیری طول وسیله‌ی مناسبی است.

ممکن است خط‌کشی در اختیار داشته باشید که درجه‌بندی روی آن میلی‌متری باشد اما شما می‌توانید به صورت چشمی ۰,۵ میلی‌متر را هم با این خط‌کش پیدا کنید. بنا بر این می‌توانید خطای دستگاه خود را ۰,۵ میلی‌متر قرار دهید.

فرض کنید طولی را اندازه‌گیری می‌کنید که بلندتر از خط‌کش باشد و برای اندازه‌گیری طول مورد نظر باید n بار از خط‌کش استفاده کنید. چون شما با این کار عملا n کمیت را با خطای دستگاه یکسان جمع کرده‌اید طبق رابطه‌ی ۱۰ مقدار خطای دستگاه شما به صورت

$$\Delta l = \sqrt{n}\Delta x \qquad \text{رابطه‌ی ۱۶}$$

است که Δl خطای طول اندازه‌گیری شده و Δx خطای دستگاه در یک اندازه‌گیری است.

گزارش عدد

به نکات زیر هنگام گزارش یک عدد باید توجه کرد:

مهم‌تر از همه این‌که حتما باید کمیت مربوط به عدد گزارش شده را بنویسید. پس در وسط مقاله‌ی خود نباید همین‌طوری یک عدد بنویسید. چون خواننده نمی‌داند که این عدد مربوط به چیست. برای مثال فرض کنید متوسط طول یک کرم خاکی را اندازه‌گیری کرده اید که برابر با $۴.۷ \pm ۰.۱cm$ شده است. شما در گزارش خود نباید این طول را مثل پایین بنویسید.

$$۴.۷ \pm ۰.۱cm$$

حداقل کار این است که شما در قبل این قرار داد را کرده باشید که طول کرم خاکی را با l نشان می‌دهید و این عدد را مانند زیر گزارش کنید.

$$\bar{l} = ۴.۷ \pm ۰.۱cm$$

اما بهتر است که به صورت کامل بنویسید یعنی

متوسط طول کرم خاکی : $\bar{l} = ۴.۷ \pm ۰.۱cm$

همیشه واحد مربوط به عددی را که گزارش می‌کنید یادداشت کنید. علت هم واضح است فرض کنید که من طولی را بدون واحد عدد ۱۸ گزارش کنم حالا این طول ۱۸ سانتی‌متر است؟ ۱۸ سال نوری است؟ یا ۱۸ آنگستروم؟

اعداد اندازه‌گیری شده خود را که تعداد آن‌ها بیش‌تر از یکی دوتا است در جدول یادداشت کنید، تا قابل فهم باشند. به علاوه واحد کمیت‌ها را می‌توانید در سطر یا ستون مربوط به مشخص کردن کمیت تعیین کنید. جدول ۱ و جدول ۵ مثالی از این موضوع هستند.

خطای عدد حتما باید نوشته شود چون خطا نشان دهنده‌ی اعتبار عدد شما است و اطلاعات خیلی مهمی در خود دارد. خصوصا اگر استدلال علمی بخواهید بکنید مثل مقایسه، برای همچین کاری حتما به خطا نیاز دارید. درست مانند مقایسه‌ای که برای اصل بازتاب در بخش‌های قبلی انجام دادیم.

همانطور که گفتیم خطای شما نباید بیش‌تر از دو رقم داشته باشد و حتی خیلی بهتر است خطای خود را با یک رقم اعشار اعلام کنید. مثلا فرض کنید طول جسمی را اندازه گرفته‌اید و خطای این طول برابر با $۱.۱cm$ شده است. بهتر است که شما خطا را $۱cm$ گزارش کنید و یا اگر خطای شما $۰.۰۲۴۳۱cm$ به دست آمد، خطای خود را به صورت $۰.۰۲cm$ گزارش کنید.

همیشه کمیت‌ها را با ارقام با معنی بنویسید. مثلا اگر متوسط طولی به اندازه‌ی $۲۲.۳۶۴cm$ با خطای $۰.۵cm$ به دست آوردید عدد خود را نباید به صورت $۲۲.۳۶۴ \pm ۰.۵cm$ گزارش کنید. چون رقم‌های کوچک‌تر از خطا ($۰.۰۶۴cm$) در اندازه‌گیری شما بی‌مفهوم هستند. پس این عدد باید به صورت $۲۲.۳ \pm ۰.۵cm$ گزارش شود. یعنی رقم‌ها باید تا مرتبه‌ی خطا نوشته شود.

نمودار

مقدمه

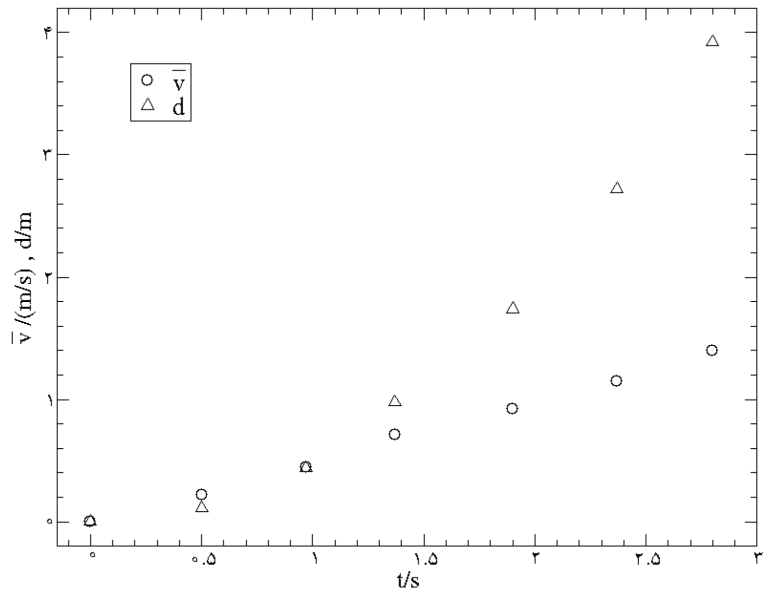
یکی از اهداف پژوهش پیدا کردن روابط بین کمیت‌ها است. گاهی از روی نتایج عددی اندازه‌گیری، می‌توان تحلیل کیفی روی اعداد ارائه کرد. مثلا بگوییم که با زیاد شدن کمیت x، کمیت y هم زیاد می‌شود (با زیاد شدن ارتفاع سقوط، زمان سقوط هم زیاد می‌شود). اما نمی‌توانیم درباره‌ی رفتار جزئی این کمیت‌ها صحبت کنیم. به عبارت دیگر، پیدا کردن روابط بین آنها کار آسانی نیست برای درک بهتر روابط بین کمیت‌ها بهتر است آنها را باهم روی یک نمودار نمایش دهیم. برای مثال به اعداد زیر توجه کنید (جدول۵). این اعداد برای یک جسم استوانه‌ای است که از روی سطح شیب‌داری با زاویه‌ی ۶ درجه رها می‌شود (ابعاد استوانه نسبت به سطح شیب‌دار کوچک است). d فاصله‌ای است که جسم تا ابتدای سطح شیب دار دارد، t زمان حرکت جسم و $\bar{v}$ سرعت متوسط جسم است. جسم را در فواصل مختلف رها کرده و زمان رسیدن آن را ثبت می‌نماییم. سرعت متوسط جسم را از تقسیم فاصله‌ی طی شده بر زمان حرکت به دست می‌آوریم. دو سری زوج مرتب الف و ب را در جدول۵ مشاهده می‌کنید که زوج مرتب‌های الف فاصله‌ی جسم و زمان حرکت است و زوج مرتب‌های ب سرعت متوسط جسم و زمان حرکت است.

زوج مرتب ب	
سرعت متوسط $(\bar{v}/\frac{m}{s})$	زمان حرکت (t/s)
۰,۰۰	۰,۰۰
۰,۲۲	۰,۵۰
۰,۴۵	۰,۹۷
۰,۷۱	۱,۳۷
۰,۹۲	۱,۹۰
۱,۱۵	۲,۳۷
۱,۴	۲,۸۰

زوج مرتب الف	
فاصله (d/m)	زمان حرکت (t/s)
۰,۰۰	۰,۰۰
۰,۱۱	۰,۵۰
۰,۴۴	۰,۹۷
۰,۹۸	۱,۳۷
۱,۷۴	۱,۹۰
۲,۷۲	۲,۳۷
۳,۹۲	۲,۸۰

جدول ۵ سری الف و ب دو دسته اندازه‌گیری در رابطه با سقوط جسمی هستند.

آیا می‌توانید تفاوت رابطه‌ی فاصله و سرعت متوسط با زمان را بیان کنید؟ مسلما کار دشواری است. اما با نگاهی به نمودار۲ تفاوت این دو سری زوج مرتب به وضوح قابل درک است.



نمودار ۲ زوج‌های مرتب سری الف و ب از جدول۴ به تصویر کشیده شده است. مثلث‌ها نقاط سری الف (فاصله) بوده و دایره‌ها نقاط سری ب (سرعت متوسط) هستند. همان‌طور که مشاهده می‌کنید نقاط سری ب (دایره‌ها) تقریبا در یک راستا بوده و یک خط به خوبی از آن‌ها می‌گذرد.

همان طور که در نمودار۲ دیده می‌شود، نقاط سری ب تقریبا در یک راستا بوده و یک خط به خوبی از آن‌ها می‌گذرد اما نقاط سری الف شکل خطی ندارند و ما نمی‌توانیم رابطه‌ای برای آن‌ها پیدا کنیم. (البته با سواد فعلی) ولی حداقل متوجه می‌شویم که رابطه‌ی این دو کمیت خطی نیست.

در واقع سری ب دارای یک رابطه‌ی خطی است. یعنی شکل نمودار آن خط است. و بنابراین رابطه‌ی زیر برای آن‌ها برقرار است

رابطه‌ی ۴

$$y = mx + b$$

که برای سرعت متوسط از نماد y و برای زمان از نماد x استفاده کرده‌ایم (انتظار داریم که شما مفهوم خطا را خوب فهمیده باشید. یعنی وقتی می‌گوییم رابطه‌ی فوق بر قرار است منظور در حد دقت آزمایش است نه به صورت کاملا دقیق). می‌توان با اندازه‌گیری شیب خط و عرض از مبدا آن (m و b)، رابطه‌ی بین دو کمیت x و y را به دست آورد. در بخش‌های بعدی به این موضوع خواهیم پرداخت.

محاسبه‌ی شیب و عرض از مبدا یک خط در نمودار

برای محاسبه‌ی شیب یک خط در ابتدا باید دو نقطه روی خط مورد نظر انتخاب کرد (شکل۳). (توجه داشته باشید برای افزایش دقت در محاسبه‌ی شیب خط بهتر است فاصله‌ی این نقاط از هم زیاد باشد). در مرحله‌ی بعد عرض و طول این دو نقطه را از روی نمودار می‌خوانیم. نقطه‌ی اول را با $(x_۱, y_۱)$ و نقطه‌ی دوم را با $(x_۲, y_۲)$ نمایش می‌دهیم. سپس مقادیر $\Delta y = y_۲ - y_۱$ و $\Delta x = x_۲ - x_۱$ را محاسبه کرده و روی نمودار، مانند شکل۳ یادداشت می‌کنیم. مقدار شیب به راحتی قابل محاسبه است:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$ رابطه‌ی ۱۷

عرض از مبدا خط هم پس از به دست آوردن شیب آن به دست می‌آید

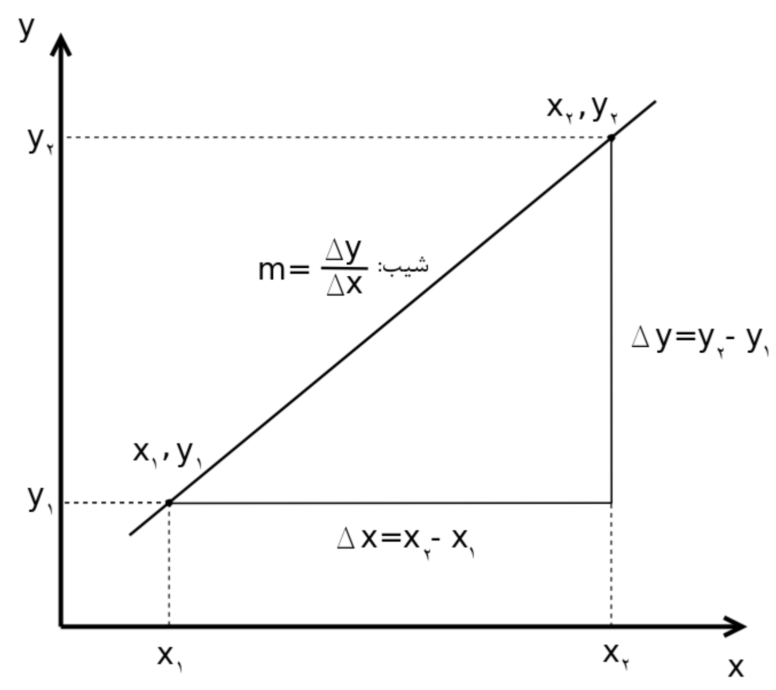
$$b = y_1 - mx_1$$ رابطه‌ی ۱۸

یا

$$b = y_2 - mx_2$$ رابطه‌ی ۱۹

از هرکدام از دو رابطه‌ی فوق که مایلید استفاده کنید.

شما می‌توانید برای تمرین شیب‌های بیشینه و کمینه و همچنین عرض از مبدأ نمودار ۵ را به دست آورده و آن‌ها را با مقادیر مقابل مقایسه کنید. $m = ۵.۲ \pm ۰.۶$ و $b = ۸ \pm ۳$



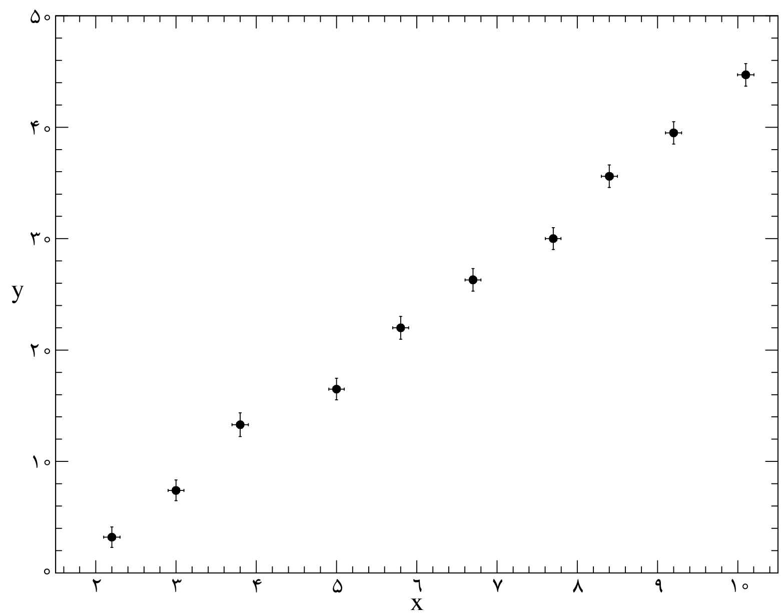
شکل ۳ روش به دست آوردن شیب یک خط

ترسیم خط مناسب

x	Δx	y	Δy
۲,۲	۰,۱	۳,۲	۰,۹
۳,۰	۰,۱	۷,٤	۰,۹
۳,۸	۰,۱	۱۳	۱
٥,۰	۰,۱	۱٦	۱
٥,۸	۰,۱	۲۲	۱
٦,۷	۰,۱	۲٦	۱
۷,۷	۰,۱	۳۰	۱
۸,٤	۰,۱	۳٥	۱
۹,۲	۰,۱	۳۹	۱
۱۰,۱	۰,۱	٤٤	۱

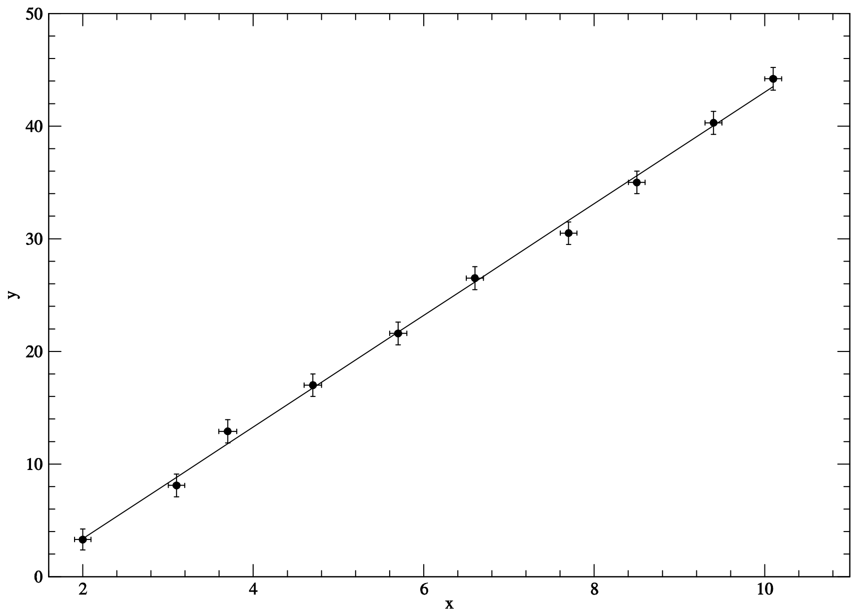
جدول ۶ اعداد نمونه با رابطه‌ی خطی

حالا فرض کنید که می‌خواهیم رابطه‌ی بین دو کمیت اندازه‌گیری شده را که خطی است پیدا کنیم. برای مثال از اعداد جدول۶ استفاده می‌کنیم. ابتدا برای این کار نقاط نمودار y برحسب x را رسم کرده و خطای آن‌ها را مشخص می‌کنیم (نمودار۳). خطای نقاط برای کمیت x و برای کمیت y در راستای خودشان به صورت پاره‌خطی که دو انتهایش مشخص شده نشان داده شده از همین رو نقاط مانند یک + بزرگ نا متقارن دیده می‌شوند.



نمودار ۳ نقاط y از جدول۶ برحسب x

روی نمودار، بهترین خطی که می‌توان از این نقاط عبور داد را با خط‌کش رسم می‌کنیم (نمودار۴). منظور از بهترین خط، خطی است که مجموع فواصل نقاط از آن کمینه شده باشد و از لحاظ ظاهر بتوان گفت به نقاط نزدیک است. سپس طبق روشی که گفته شد، شیب و عرض از مبدا خط رسم شده را پیدا می‌کنیم. با داشتن این دو مقدار عملا رابطه‌ی مورد نظر را پیدا کرده‌ایم.



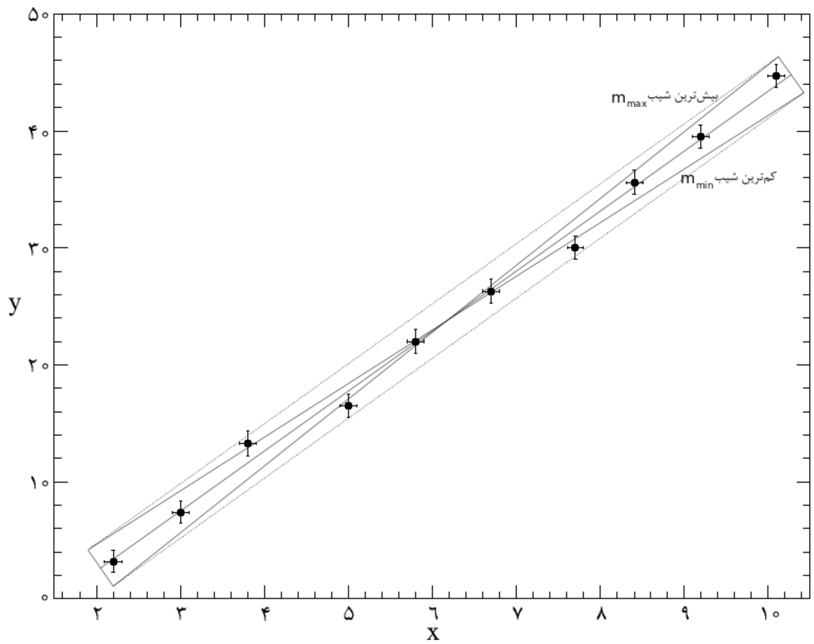
نمودار ۴ رسم بهترین خط برای نقاط نمودار۳

اما هنوز کار ما تمام نشده است. ما باید خطای رابطه‌ی حاکم را نیز پیدا کنیم. برای محاسبه‌ی خطا کوچکترین مستطیلی را در نظر می‌گیریم که :

اضلاع بزرگ مستطیل با بهترین خط رسم شده موازی باشند و همه نقاط را شامل شود.

توجه : منظور از کوچک‌ترین مستطیل، مستطیلی است که کم‌ترین مساحت را داشته باشد

پس باید با خط‌کشی دو خط موازی با بهترین خط بالا و پایین آن رسم کنیم به طوری که فاصله‌ی هر خط موازی از بهترین خط در عین این‌که همه‌ی نقاط را شامل می‌شود کمینه باشد. قطرهای این مستطیل را رسم کرده و این دو قطر را به عنوان دو خط در نظر می‌گیریم (نمودار ۵). بعد شیب و عرض از مبدا این دو خط را محاسبه کرده و با استفاده از روابط زیر خطای شیب و عرض از مبدا را پیدا می‌کنیم.



نمودار ۵ چگونگی رسم خط‌های با بیش‌ترین و کم‌ترین شیب به کمک مستطیل در نمودار۴

در روابط m_{max} شیب خطی است که بیش‌ترین شیب را داشته و m_{min} شیب قطر دیگر مستطیل است که کم‌ترین شیب را دارد. و b_{max} عرض از مبدا خطی است که بیش‌ترین عرض از مبدا را داشته و b_{min} عرض از مبدا قطر دیگر مستطیل است که کم‌ترین مقدار را دارد.

$$\overline{m} = \frac{m_{max} + m_{min}}{۲} \qquad \text{رابطه‌ی ۲۰}$$

می‌توان از $\overline{m}$ به جای شیب بهترین خط استفاده کرد. و خطای آن نیز به صورت زیر می‌شود

$$\Delta m = \frac{m_{max} - m_{min}}{۲} \qquad \text{رابطه‌ی ۲۱}$$

به همین صورت برای عرض از مبدا بهترین خط داریم

$$\overline{b} = \frac{b_{max} + b_{min}}{۲} \qquad \text{رابطه‌ی ۲۲}$$

و خطای آن نیز به صورت زیر می‌شود

$$\Delta b = \frac{b_{max} - b_{min}}{۲} \qquad \text{رابطه‌ی ۲۳}$$

پس بهتر است از همان ابتدا شیب بهترین خط را محاسبه نکنیم. یعنی ابتدا بهترین خط را رسم، بعد خط با بیش‌ترین شیب و کم‌ترین شیب را به روشی که گفته شد رسم کرده و بیش‌ترین و کم‌ترین شیب و عرض از مبدا را با این دو خط پیدا کنیم. با استفاده از رابطه‌ی ۱۶ و رابطه‌ی ۲۱ شیب و عرض از مبدا بهترین خط را هم می‌توان پیدا کرد و خطای آن‌ها را از رابطه‌ی ۲۱ و رابطه‌ی ۲۳ به دست بیاوریم. در این حالت برای پیدا کردن بهترین شیب دردسر کم‌تری می‌کشیم!

به دست آوردن روابطی که خط نیستند

تا به الان شما یاد گرفتید که رابطه‌ی بین دو کمیت را که به صورت خطی هستند بدست بیاورید. حالا اگر شما نموداری رسم کردید و نقاط آن به صورت خطی نبود (جدول۵ و جدول ۷) چه باید کرد؟ در این بخش می‌خواهیم روشی برای پیدا کردن روابط دیگری غیر از رابطه‌ی خطی پیدا کنیم.

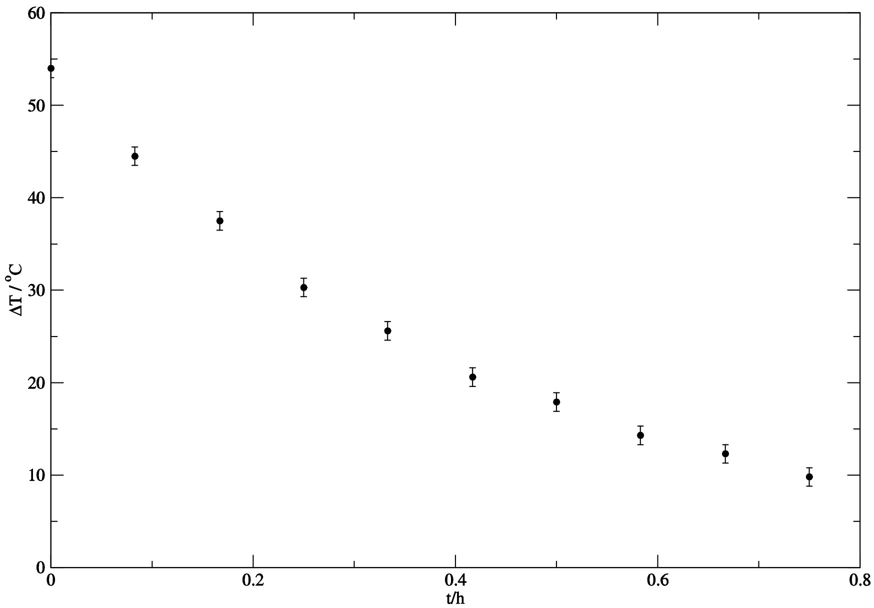
اعداد جدول ۷ نتیجه‌ی آزمایش زیر است:

یک لیوان آب را داخل مایکروویو قرار می‌دهیم تا به جوش بیاید. کمی صبر می‌کنیم تا لیوان آب با بدنه‌ی لیوان هم دما شود. سپس دماسنجی را داخل لیوان آب قرار داده و زمان‌سنج را به کار می‌اندازیم. در هر زمانی دمای آب را می‌خوانیم (این آزمایش را تکرار می‌کنیم). نتایج میانگین دما در زمان‌های مختلف در جدول ۷ قابل مشاهده‌اند.

زمان (t/h)	اختلاف دما با محیط ($\Delta T/°C$)	خطای زمان (s)	خطای دما ($°C$)
۰,۰۰۰	۵۴	۰,۰۰۱	۱
۰,۰۸۳	۴۴	۰,۰۰۱	۱
۰,۱۶۷	۴۷	۰,۰۰۱	۱
۰,۲۵۰	۳۰	۰,۰۰۱	۱
۰,۳۳۳	۲۶	۰,۰۰۱	۱
۰,۴۱۷	۲۱	۰,۰۰۱	۱
۰,۵۰۰	۱۸	۰,۰۰۱	۱
۰,۵۸۳	۱۴	۰,۰۰۱	۱
۰,۶۶۷	۱۲	۰,۰۰۱	۱
۰,۷۵۰	۱۰	۰,۰۰۱	۱

جدول ۷ اختلاف دمای یک لیوان آب با محیط بر حسب زمان (آب در حال سرد شدن است).

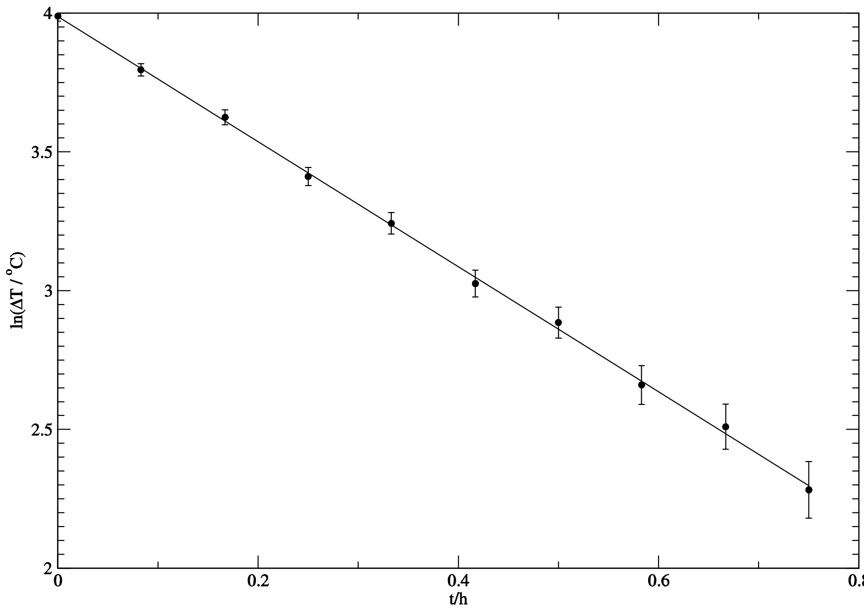
در ابتدای کار به سراغ رسم نمودار اعداد جدول ۷ می‌رویم. که در نمودار۶ رسم شده است. دیده می‌شود که نقاط نمودار۶ به صورت یک خط نیستند و انحنایی ایجاد کرده‌اند.



نمودار ۶ اختلاف دمای آب در حال سرد شدن با محیط بر حسب زمان‌های مختلف (خطای زمان آن‌قدر کوچک است که قابل نمایش دادن نیست). همان‌طور که مشاهده می‌شود این نقاط تقعری به سمت بالا دارند که نشان دهنده‌ی خطی نبودن روابط نقاط است.

حالا به جای رسم خود اختلاف دما برحسب زمان لگاریتم[1] اختلاف دما بر حسب زمان، را در نمودار۷ رسم می‌کنیم. این‌بار نقاط تقریبا روی یک خط قرار دارند (رفتار خطی دارند).

[1] لگاریتم یک تابع است. برای اطلاعات بیش‌تر به پیوست انتهای این جزوه مراجعه نمایید.



نمودار ۷ لگاریتم اختلاف دمای آب در حال سرد شدن با محیط بر حسب زمان‌های مختلف (خطای زمان آن‌قدر کوچک است که قابل نمایش دادن نیست). همان‌طور که مشاهده می‌شود این نقاط به صورت یک خط در آمده‌اند. بهترین خط قابل برازش هم برای این نقاط در این نمودار رسم شده است. رابطه‌ی بهترین خط به صورت $y=-(۲.۲۵\pm۰.۰۲)x+(۳.۹۹\pm۰.۰۱)$ است.

پس رابطه‌ی مورد نظر ما به صورت $y=-(۲.۲۵\pm۰.۰۲)x+(۳.۹۹\pm۰.۰۱)$ است که در آن x همان t/h بوده و y نیز $\ln(\Delta T/°C)$ (لگاریتم طبیعی اختلاف دما) است. با جای‌گذاری این دو کمیت در رابطه‌ی این خط خواهیم داشت

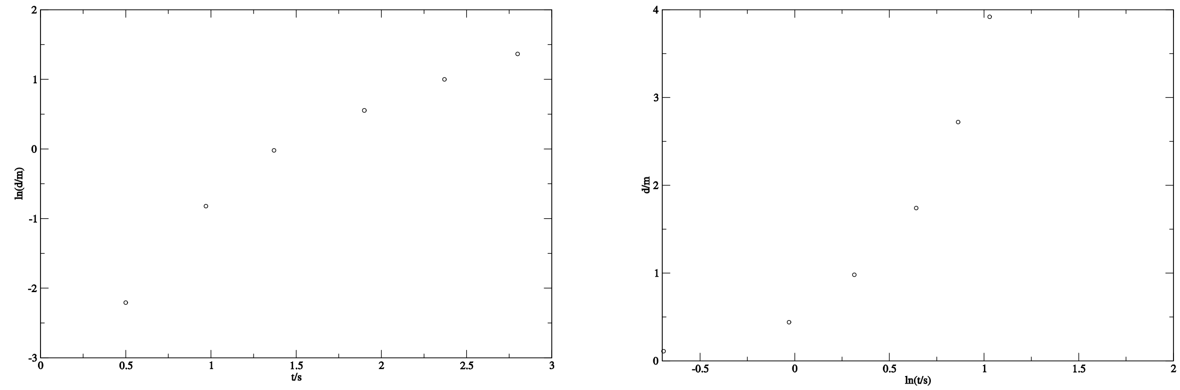
$$\ln(\Delta T/°C)=-(۲.۲۵\pm۰.۰۲)(t/h)+(۳.۹۹\pm۰.۰۱)$$ رابطه‌ی ۲۴

با گرفتن تابع معکوس لگاریتم طبیعی (تابع معکوس لگاریتم طبیعی تابع نمایی است) از دوطرف رابطه‌ی ۲۴ به دست می‌آوریم

$$(\Delta T/°C)=\exp(-(۲.۲۵\pm۰.۰۲)(t/h))\exp(۳.۹۹\pm۰.۰۱)$$ رابطه‌ی ۲۵

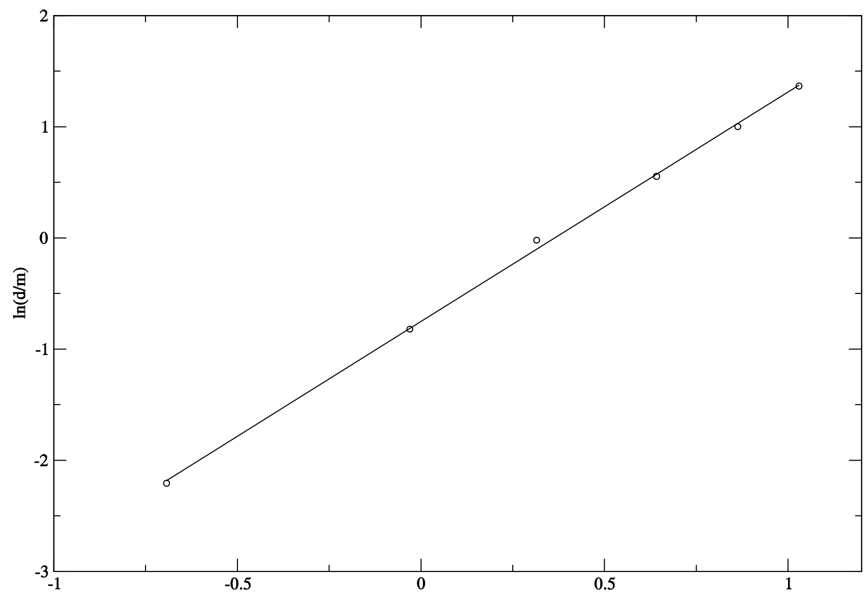
که با محاسبه‌ی $\exp(۳.۹۹\pm۰.۰۱)$ به رابطه‌ی نهایی برای اختلاف دما با محیط می‌رسیم

$$(\Delta T/°C)=(۵۴.۰\pm۰.۵)\exp(-(۲.۲۵\pm۰.۰۲)(t/h))$$ رابطه‌ی ۲۶



نمودار ۸ سمت چپ: لگاریتم فاصله‌ی رها کردن جسم از ابتدای سطح شیب‌دار بر حسب زمان رسیدن جسم به ابتدای سطح شیب‌دار. سمت راست: فاصله‌ی رها کردن جسم از ابتدای سطح شیب‌دار بر حسب لگاریتم زمان رسیدن جسم به ابتدای سطح شیب‌دار. هیچ کدام از این دو منحنی به صورت خطی نیستند.

حالا به اعداد سری الف جدول۵ توجه کنید. همان‌طور که در نمودار۲ مشاهده کردیم این اعداد دارای یک رابطه‌ی خطی نیستند. اگر مانند حالت قبل لگاریتم فاصله را بر حسب زمان رسم کنیم و یا بالعکس، باز هم نقاط روی یک خط نخواهند بود (نمودار ۸). اما می‌توانیم لگاریتم فاصله را بر حسب لگاریتم زمان این نقاط رسم کنیم که در نمودار ۹ قابل مشاهده‌اند و دیده می‌شود که این نقاط تقریبا روی یک خط قرار می‌گیرند.



نمودار ۹ لگاریتم فاصله‌ی رها کردن جسم از ابتدای سطح شیب‌دار بر حسب لگاریتم زمان رسیدن جسم به ابتدای سطح شیب‌دار. به وضوح دیده می‌شود که این نقاط روی یک خط نشسته‌اند. خط رسم شده بهترین خطی است که از این نقاط می‌گذرد و رابطه‌ی آن به صورت $y = (۲.۰۶ \pm ۰.۰۳)x - (۰.۷۵ \pm ۰.۰۲)$ است.

پس رابطه‌ی ما $y = (۲.۰۶ \pm ۰.۰۳)x - (۰.۷۵ \pm ۰.۰۲)$ بوده که در آن x و y به ترتیب $\ln(t/s)$ و $\ln(d/m)$ هستند. با گذاشتن این‌ها در رابطه‌ی خط به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

رابطه‌ی ۲۷
$$\ln(d/m) = (۲.۰۶ \pm ۰.۰۳)\ln(t/s) - (۰.۷۵ \pm ۰.۰۲)$$

با گرفتن تابع معکوس لگاریتم طبیعی خواهیم داشت

رابطه‌ی ۲۸
$$(d/m) = \exp((۲.۰۶ \pm ۰.۰۳)\ln(t/s))\exp(-(۰.۷۵ \pm ۰.۰۲))$$

و با ساده کردن و به دست آوردن اعداد و خطاها به رابطه‌ی نهایی می‌رسیم. همان گونه که انتظار می‌رفت توان زمان در این رابطه نزدیک به ۲ است (حرکت شتاب‌دار یک‌نواخت).

رابطه‌ی ۲۹
$$(d/m) = (۰.۴۷ \pm ۰.۰۱)(t/s)^{(۲.۰۶\pm۰.۰۳)}$$

پس بعد از این برای پیدا کردن رابطه‌ی بین دو کمیت فیزیکی ابتدا نمودار دو کمیت بر حسب یک‌دیگر را رسم می‌کنیم. اگر نقاط به شکل خط بودند که ما یک رابطه‌ی خطی داریم و اگر به صورت خط نبود ناراحت نمی‌شویم. نمودار لگاریتم کمیت اول بر حسب کمیت دوم را رسم می‌کنیم و اگر نتیجه نداد برعکس عمل می‌کنیم یعنی لگاریتم کمیت دوم را برحسب کمیت اول رسم می‌نماییم. باز هم اگر خطی مشاهده نشد هنوز یک راه باقی مانده است و آن این است که لگاریتم هر دو کمیت را بر حسب یک‌دیگر رسم کنیم. و اگر با این کار هم خطی به وجود نیامد توصیه می‌کنم مساله‌ی خودتان را عوض کنید. عملا ما در تمام حالات به دنبال خط هستیم. منتها این خط می‌تواند برای خود کمیت‌ها برقرار باشد یا برای لگاریتم یکیشان و یا هردوشان. برای بهتر فهمیدن این موضوع به بررسی انواع روابطی که می‌توانیم به دست بیاوریم، می‌پردازیم.

روابطی که ما می‌توانیم به دست بیاوریم به صورت زیر هستند

خطی:

رابطه‌ی ۳۰
$$y = ax + b$$

روشن است که با کشیدن y بر حسب x یک خط به دست می‌آوریم

نمایی:

رابطه‌ی ۳۱
$$y = ae^{bx}$$

که با گرفتن لگاریتم از دو طرف رابطه‌ی فوق به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

رابطه‌ی ۳۲
$$\ln(y) = bx + \ln(a)$$

از رابطه‌ی بالا معلوم است که $\ln(y)$ بر حسب x به شکل خطی می‌شود که شیب این خط ضریب x در نما بوده و عرض از مبدا آن لگاریتم ضریب تابع نمایی (a) است

توانی:

رابطه‌ی ۳۳
$$y = ax^b$$

که با گرفتن لگاریتم از دو طرف رابطه‌ی فوق به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

رابطه‌ی ۳۴
$$\ln(y) = \ln(a) + b\ln(x)$$

از رابطه‌ی بالا به معلوم است که $\ln(y)$ بر حسب $\ln(x)$ به شکل خطی می‌شود که شیب این خط توان x در رابطه‌ی ۳۳ بوده و عرض از مبدا آن لگاریتم ضریب تابع توانی (a) است.

رسم نمودار

در رسم نمودار باید توجه کرد نمودار طوری مقیاس‌بندی شود که برای رسم نقاط از تمام نمودار استفاده شود و قسمتی از آن بدون استفاده نماند. مقیاس‌ها هم نوشته شود یعنی روی محورها اعداد مشخص شوند. کمیت‌ها به همراه واحد روی محورها مشخص شود. حتما خطای نقاط به صورت یک خط نشان داده شود (همان‌گونه که در نمودارهای این جزوه نشان داده شده) برای نمودار شماره‌ای تعیین کرده تا بتوان به آن ارجاع داد و توضیحات لازم در جلوی شماره‌ی نمودار داده شود.

هنگام لگاریتم گرفتن باید توجه کرد که خطای لگاریتم کمیت با خطای خود کمیت متفاوت است. اگر کمیت x با خطای Δx باشد. خطای $\ln(x)$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

رابطه‌ی ۳۵
$$\Delta\ln(x) = \frac{\Delta x}{x}$$

حتما خطاها باید در نمودار نمایش داده شوند خصوصا وقتی که می‌خواهید با استفاده از نقاط نمودار استدلالی کنید. در یکی از کارهای سال ۱۳۸۷ این مشکل بود. دانش‌آموزی ادعا می‌کرد که با یک پدیده‌ی جالب مواجه شده است، با زیاد شدن کمیت x کمیت y در یک محدوده افت شدید دارد که این خارج از انتظار بود ولی متاسفانه آزمایش را تنها یک‌بار انجام داده بود و خطایی برای نقاط نمودارش نداشت و به خاطر همین موضوع استدلالش کاملا غیر علمی بود. همیشه حواستان باشد اگر با چیز خارق العاده‌ای مواجه شدید و می‌خواهید استدلالی انجام دهید، اول از پدیده‌ی خارق العاده‌ی خود با محاسبات خطا مطمئن شده بعد شروع به نظریه پردازی کنید.

پیوست

پیوست الف: محاسبه‌ی خطای توابع در حالت کلی

تابع دلخواه یک متغیره

برای فهمیدن این قسمت لازم است با مفهوم مشتق آشنا باشید. فرض کنید می‌خواهیم تابع f از کمیت مورد نظر (x) را بگیریم. که خطای آن کمیت Δx است. خطای $f(x)$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\Delta f = \left|\frac{df}{dx}\right|_x \Delta x \qquad \text{رابطه‌ی ۳۶}$$

که $\left|\frac{df}{dx}\right|_x$ قدر مطلق مشتق تابع f در نقطه‌ی x است.

تابع دلخواه چند متغیره

برای فهمیدن این قسمت لازم است با مفهوم مشتق جزئی آشنا باشید. فرض کنید که می‌خواهیم تابع f از کمیت‌های مورد نظر ($x_۱, x_۲, x_۳, ..., x_k$) را بگیریم. که خطای آن‌ها $\Delta x_۱, \Delta x_۲, \Delta x_۳, ..., \Delta x_k$ است. خطای $f(x)$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\Delta f = \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x_۱}\Delta x_۱)^۲ + (\frac{\partial f}{\partial x_۲}\Delta x_۲)^۲ + (\frac{\partial f}{\partial x_۳}\Delta x_۳)^۲ + ...(\frac{\partial f}{\partial x_k}\Delta x_k)^۲} \qquad \text{رابطه‌ی ۳۷}$$

پیوست ب: تابع نمایی و لگاریتم

شما حتما توان‌های عدد ۲ را می‌شناسید ۱، ۲، ۴، ۸ و .... ما می‌توانیم این اعداد را به صورت ۲^n نمایش دهیم. با استفاده از همین تابعی معرفی می‌کنیم به شکل $y = a^x$ که به آن یک تابع نمایی می‌گویند. تابع معکوس این گونه توابع را لگاریتم می‌نامند. مثلا تابع معکوس $y = a^x$ به شکل $\log_a$ نشان داده می‌شود و داریم : $x = \log_a y$ در واقع حاصل $\log_a b$ عددی را می‌دهد که اگر a به توان آن عدد برسد عدد b حاصل خواهد شد ($a^{\log_a b} = b$). اگر $a = ۱۰$ باشد $\log_{۱۰}$ را به صورت اختصار به شکل $\log$ می‌نویسند. عدد گنگی به نام عدد نپر وجود دارد که به دلایلی برای ما جالب است و آن را با e نمایش می‌دهند که مقدار آن تا سه رقم اعشار به صورت $e = ۲.۷۱۸$ است. $\log_e$ را نیز برای اختصار به صورت $\ln$ نمایش می‌دهند و به آن لگاریتم طبیعی می‌گویند. توابع لگاریتمی دارای خواص زیر هستند

$$\log_a x = \log_a x + \log_a y$$ رابطه‌ی ۳۸

$$\log_a x^k = k \log_a x$$ رابطه‌ی ۳۹

رابطه‌ی ۳۸ و رابطه‌ی ۳۹ یکی از کاربردی‌ترین و مهم‌ترین رابطه‌های لگاریتم هستند.

$$a^x = b^{x \log_b a}$$ رابطه‌ی ۴۰

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$ رابطه‌ی ۴۱

طبق رابطه‌ی ۴۰ هر تابع $y = a^x$ را می‌توان به صورت $y = e^{x \ln a}$ نوشت. بنابراین ما همیشه توابع نمایی را به صورت کلی به شکل $y = ae^{bx}$ در نظر می‌گیریم و هنگام لگاریتم گرفتن از تابع لگاریتم طبیعی ($\ln$) استفاده می‌کنیم.